Академия наук Белорусской ССР

Редколлегия журнала "Известия АН БССР.

Серия физико-математических наук"

УДК 539.1.12

М.А. Иванов

Система уравнений, описывающая 4 поколения с группой симметрии $SU(3)_C x SU(2)_L x U(1)$

Депонировано в ВИНИТИ 19.12.88,

№ 8842 – В 88

Минск - 1988

В модели сильных и электрослабых взаимодействий, основанной на группе $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$ [1], лептонный и кварковый секторы модели, если не учитывать различий по отношению к $SU(3)_c$, отличаются незначительно - в лептонном секторе вводится один синглет $SU(2)_R$, в кварковом - два синглета. Если подтвердятся результаты измерений массы нейтрино [2], простейший способ модификации модели для получения ненулевой массы нейтрино - введение второго синглета $SU(2)_R$ в лептонном секторе. В этой статье показано, что именно такой структурой мультиплетов и такой группой начальной симметрии решений в каждом поколении обладает модель поля двухкомпонентных фермионов, допускающая существование четырех однотипных поколений. Важно отметить, что тип группы симметрии и тип её допустимых мультиплетов являются следствиями модели и устанавливаются путем анализа уравнений для поля. Минимальное число поколений также не может быть произвольным. Представление о цвете состояний поля в модели можно связать с определенными инверсиями, затрагивающими внешние и внутренние координаты составного фермиона. Таким образом, возможно, что подобная модель поля фермионов найдет применение при построении общего описания фундаментальных частиц и их взаимодействий.

Рассматриваемую модель при нулевых массах компонентов можно интерпретировать двояко: как нелокальную теорию поля, основанную на использовании двухточечной волновой функции в четырехмерном пространстве-времени или как локальную теорию поля в восьмимерном псевдоевклидовом пространстве с двумя осями времени, причем дополнительные координаты имеют ясную физическую интерпретацию – это координаты относительного положения компонентов составной системы. Известно, что геометрическое описание полей и их взаимодействий в пространствах большей, чем 4, размерности позволяет совместно рассмотреть грави-электро-слабые и грави-электро-сильные поля и взаимодействия уже в семимерном пространстве о одним временем [3], и возможность простой интерпретации дополнительных измерений в 8-мерии представляется существенным моментом.

Классические уравнения связи энергий E и E^1, E^2 и импульсов $\bar{p}$ и $\bar{p}^1$, $\bar{p}^2$ составной системы и двух её компонентов

$$E = E^1 + E^2, \tag{I}$$

$$\bar{p} = \bar{p}^1 + \bar{p}^2, \tag{2}$$

где $E^i = \sqrt{m^{i2} + \bar{p}^{i2}}$, $i = 1, 2$, используем для введения уравнений для поля Ψ с помощью приема Дирака. Сначала проведем линеаризацию нелинейного по отношению к величинам p^{ik} уравнения (I), а затем постулируем замену классических енергий и импульсов операторами этих величин. Сопоставим (I) линейное уравнение $(c = \hbar = 1)$

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = (\beta_1 m^1 + \alpha_{1k} p^{1k} + \beta_2 m^2 + \alpha_{2k} p^{2k})\Psi, \tag{3}$$

где t – время, p^{1k} и p^{2k} – операторы импульсов компонентов, β, α_{ik} – матрицы, Ψ – волновая функция. Можно показать, что требуются комплексные матрицы размерности большей, чем 8 x 8, чтобы выполнялся принцип соответствия. Размерности I6 x I6 достаточно, чтобы построить матрицы с получаемой из принципа соответствия алгеброй, которая содержит и коммутаторы $[\ ,\ ]$, и антикоммутаторы $\{\ ,\ \}$:

$$\{\alpha_{ik}, \alpha_{il}\} = 2\delta_{kl}, \quad \{\alpha_{ik}, \beta_i\} = 0,$$

$$\beta_i^2 = I_{16}, \quad [\beta_i, \beta_j] = [\alpha_{ik}, \beta_j] = [\alpha_{ik}, \alpha_{jl}] = 0,$$

$$i \neq j, \qquad \text{(нет суммирования по } i\text{)} \qquad (4)$$

Эти соотношения выполняются для следующего представления матриц:

$$\beta_1 = I_2 \times \sigma_3 \times I_4, \quad \beta_2 = \sigma_3 \times \sigma_3 \times I_4,$$

$$\alpha_{1k} = \sigma_1 \times \sigma_1 \times I_2 \times \sigma_k',$$

$$\alpha_{2k} = \sigma_1 \times I_2 \times \sigma_k'' \times I_2, \qquad (5)$$

где σ_k - матрицы Паули, I_k - единичная $k \times k$ матрица, σ_k' и σ_k'' - две перестановки матриц Паули, например $\sigma_k' = \sigma_k'' = \sigma_k$.

Уравнение (3) по форме подобно уравнению Бете-Солпитера [1], используемому для описания таких составных систем, как м...

Естественно и для операторов импульсов взамен (2) постулировать связь вида

$$p^k \psi = p^{1k}\psi + p^{2k}\psi, \qquad (6)$$

где p^k - оператор импульса системы, ψ - 16-компонентный вектор. Если явно ввести операторы энергии компонентов E^1 и E^2, то (3) будет иметь такой же вид $(E \equiv i\partial/\partial t)$

$$E\psi = E^1\psi + E^2\psi, \qquad (7)$$

т.е. уравнения движения компонентов есть

$$E^i\psi = \alpha_{ik} p^{ik}\psi + \beta_i m^i \psi \qquad \text{(нет суммирования по } i\text{)} \qquad (8)$$

Если $x_{1\mu}$, $x_{2\mu}$ - координаты первого и второго компонентов, $\psi = \psi(x_{1\mu}, x_{2\mu})$, то уравнения (6) и (7) в форме $p^\mu\psi = p^{1\mu}\psi + p^{2\mu}\psi$ можно понимать как переход в восьмимерном псевдоевклидовом пространстве от координат ($x_{1\mu}$, $x_{2\mu}$) к новым координатам (x_μ, y_μ), где x_μ - координаты центра инерции системы, $p^\mu = i\partial/\partial x_\mu$, а вторая четверка y_μ новых координат явно ещё не определена. В пространстве операторов $p^{1\mu}$, $p^{2\mu}$ такой переход - это поворот, при котором независимые от p^μ операторы $\pi^\mu \equiv i\partial/\partial y_\mu$ можно определить как

$$\pi^\mu\psi \equiv p^{1\mu}\psi - p^{2\mu}\psi. \tag{9}$$

Тогда из (8) кроме (3) следует независимое от него уравнение

$$\pi^0\psi = (\beta_1 m^1 - \beta_2 m^2 + \alpha_{1k} p^{1k} - \alpha_{2k} p^{2k})\psi. \tag{10}$$

Уравнения (3) и (10) содержат слагаемые

$$\bar{\alpha}_1 \bar{p}^1 \psi \pm \bar{\alpha}_2 \bar{p}^2 \psi \equiv \frac{1}{2}\left[(\bar{\alpha}_1 \pm \bar{\alpha}_2)\bar{p}\psi + (\bar{\alpha}_1 \mp \bar{\alpha}_2)\bar{\bar{\pi}}\psi\right],$$

отличающиеся заменой $\bar{p}\psi \leftrightarrow \bar{\bar{\pi}}\psi$. Существуют матрицы A_k такие, что принятие дополнительного условия

$$\alpha_{1k} p^{1k}\psi + \alpha_{2k} p^{2k}\psi = A_k p^k \psi \tag{11}$$

и его следствия (в силу указанной симметрии)

$$\alpha_{1k} p^{1k}\psi - \alpha_{2k} p^{2k}\psi = A_k \pi^k \psi \tag{12}$$

приводит к распаду 16-компонентных уравнений (3) и (10) на четверки уравнений Дирака для некоторых четырех компонент ψ. Примем (11) как постулат; для A_k можно взять представление

$$A_k = I_2 \times \sigma_1 \times \sigma_k \times I_2 \ .$$

Теперь уравнения (3) и (I0) можно записать как

$$E\Psi = (\beta_1 m^1 + \beta_2 m^2)\Psi + \bar{A}\bar{P}\Psi, \tag{I3}$$

$$\pi^0\Psi' = (\beta_1 m^1 - \beta_2 m^2)\Psi' + \bar{A}\bar{\bar{\pi}}\Psi, \tag{I4}$$

где $\Psi = \Psi(x_\mu, y_\mu)$, а (II), (I2) с учетом (6) и (7) как

$$(\bar{A} - \bar{\alpha}_1)(\bar{P} + \bar{\bar{\pi}})\Psi = 0, \tag{I5}$$

$$(\bar{A} - \bar{\alpha}_2)(\bar{P} - \bar{\bar{\pi}})\Psi = 0; \tag{I6}$$

при переходе от (8) к (I3), (I4) условия (I5), (I6) обеспечивают совместность этих систем уравнений для функции Ψ, заданной в разных координатных пространствах. Эти условия не содержат явно производных по времени, подобно условию на волновую функцию для частиц со спином 3/2, когда уравнения поля записаны в форме Рарита-Швингера [5]. Уравнения (I3) - (I6) дают нам модель двухкомпонентной системы без учета взаимодействий, описывающую в физическом пространстве с координатами x_μ четыре набора фермионов, которые будем называть поколениями.

Рассмотрим симметрии решений модели для случая $m_1 = m_2 = 0$. Структура матриц A_k такова, что уравнениям Дирака удовлетворяют следующие наборы компонент Ψ': $\Psi'_1, \Psi'_3, \Psi'_5, \Psi'_7$; $\Psi'_2, \Psi'_4, \Psi'_6, \Psi'_8$; $\Psi'_9, \Psi'_{11}, \Psi'_{13}, \Psi'_{15}$; $\Psi'_{10}, \Psi'_{12}, \Psi'_{14}, \Psi'_{16}$. Введем левые и правые компоненты этих четырехкомпонентных спиноров Ψ': $\Psi'_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\Psi'$, $\Psi'_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\Psi'$;

компоненты их вида $\frac{1}{2}(\Psi_k \pm \Psi_n)$ будем кратко записывать как $(k \pm n)$, где (+) относится к правым компонентам, (-) - к левым. Из уравнений (I3), (I4) следует, что

$$(\bar{A}\bar{p})(\bar{A}\bar{\bar{\pi}})\Psi = \bar{p}\bar{\bar{\pi}}\Psi = E\,\bar{\pi}^{\circ}\Psi, \tag{I7}$$

т.е. $\Psi(x,y)$ не зависит от "угла" между векторами $\bar{p}$ и $\bar{\bar{\pi}}$. Это значит, что теория инвариантна по отношению к глобальной группе $SO(3)$. При инверсии $(x,y) \to (x,-y)$ имеем такую же ситуацию, поэтому теория $SU(2)$ - инвариантна ($SU(2)/(\pm I) = SO(3)$), и компоненты Ψ должны преобразовываться по некоторому представлению $SU(2)$. Анализ условий (I5) и (I6) показывает, что именно они определяют структуру мультиплетов $SU(2)$. Эти условия накладывают следующие ограничения: I) совместно не могут существовать и дублеты и синглеты $SU(2)_L$, равно как и дублеты и синглеты $SU(2)_R$; 2) если Ψ^A и Ψ^B - два разных решения, то их компоненты по отдельности могут образовывать только синглеты; 3) первую (вторую) компоненту дублетов можно образовать только из компонент одного решения; 4) можно образовать до 4 дублетов одной из групп $SU(2)_L$ или $SU(2)_R$ (какой именно - зависит от варианта модели), причем все дублеты преобразуются по переплетенным представлениям группы (т.е. преобразование одного дублета должно сопровождаться точно таким же преобразованием остальных дублетов), и до 8 синглетов другой $SU(2)$.

Прежде чем доказать эти предложения, поясним, что упомянуто как "варианты модели". Алгебра (4) допускает смену знака у любой из матриц выбранного представления. Пусть $\varepsilon_{ik} = \pm 1$ - множители для α_{ik} при такой смене, $\alpha_{ik} \to \varepsilon_{ik}\,\alpha_{ik}$ (нет суммирования по i, k). Оказывается, что при $\varepsilon_{1k}\varepsilon_{2k} = +1$ $(\forall k)$ возможны дублеты только $SU(2)_R$, при $\varepsilon_{1k}\varepsilon_{2k} = -1$ – только дублеты $SU(2)_L$.

Для доказательства приведенных предложений запишем (I5) и (I6) в компонентах:

$$\mathcal{D}_1 \varphi_1 = 0, \quad \mathcal{D}_2 \varphi_2 = 0, \tag{I8}$$

где операторы $\mathcal{D}_i \equiv [p^{i1}, -p^{i1}, ip^{i2}, -ip^{i2}, p^{i3}, -p^{i3}]$ ($p^{i\mu} = p^{i\mu}(p^\mu, \pi^\mu)$), а матрицы φ_1 и φ_2, имеют вид:

$$\begin{bmatrix}
3\pm7 & 4\pm8 & I\pm5 & 2\pm6 & II\pm I5 & I2\pm I6 & 9\pm I3 & I0\pm I4 \\
I0\pm I4 & 9\pm I3 & I2\pm I6 & II\pm I5 & 2\pm6 & I\pm5 & 4\pm8 & 3\pm7 \\
I0\pm I4 & -(9\pm I3) & I\pm5 & 2\pm6 & 2\pm6 & -(I\pm5) & 9\pm I3 & I0\pm I4 \\
3\pm7 & 4\pm8 & -(I2\pm I6) & II\pm I5 & II\pm I5 & I2\pm I6 & -(4\pm8) & 3\pm7 \\
I\pm5 & 2\pm6 & -(II\pm I5) & I2\pm I6 & 9\pm I3 & I0\pm I4 & -(3\pm7) & 4\pm8 \\
9\pm I3 & -(I0\pm I4) & 3\pm7 & 4\pm8 & I\pm5 & -(2\pm6) & II\pm I5 & I2\pm I6
\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}
\pm(3\pm7) & \pm(4\pm8) & \pm(I\pm5) & \pm(2\pm6) & \pm(II\pm I5) & \pm(I2\pm I6) & \pm(9\pm I3) & \pm(I0\pm I4) \\
II\pm I5 & I2\pm I6 & 9\pm I3 & I0\pm I4 & 3\pm7 & 4\pm8 & I\pm5 & 2\pm6 \\
II\pm I5 & I2\pm I6 & \pm(I\pm5) & \pm(2\pm6) & 3\pm7 & 4\pm8 & \pm(9\pm I3) & \pm(I0\pm I4) \\
\pm(3\pm7) & \pm(4\pm8) & 9\pm I3 & I0\pm I4 & \pm(II\pm I5) & \pm(I2\pm I6) & I\pm5 & 2\pm6 \\
\pm(I\pm5) & \pm(2\pm6) & II\pm I5 & I2\pm I6 & \pm(9\pm I3) & \pm(I0\pm I4) & 3\pm7) & 4\pm8 \\
9\pm I3 & I0\pm I4 & \pm(3\pm7) & \pm(4\pm8) & I\pm5 & 2\pm6 & \pm(II\pm I5) & \pm(I2\pm I6)
\end{bmatrix};$$

Если Ψ преобразуется под действием генераторов $SU(2)_L$ или $SU(2)_R$, то в каждой матрице $\varphi_{1,2}$ все столбцы должны сохраниться с точностью до их перестановки. Пусть $\Psi^A(x,y)$, $\Psi^B(x,y)$ – решения уравнений (I3), (I4). Матрицы φ_i таковы, что компоненты Ψ^{A} (или Ψ^{B}) не могут быть первой, и второй компонентой дублета - при $SU(2)$ - преобразованиях это привело бы к изменению некоторых столбцов φ_i, т.е. из Ψ^{A} (Ψ^{B}) можно построить только синглеты. Биекция $\varphi_1 \to \varphi_2$ (как упорядоченных множеств своих элементов) невозможна, что подтверждает необходимость именно инверсии $y \to -y$ (а не $\bar{y} \to -\bar{y}$) при переходе от одной $SO(3)$ к другой. Матрица φ_1 допускает единственное, кроме тождественного, соответствие между компонентами Ψ^{A} и Ψ^{B}: $\Psi^{B} = U\Psi^{A}$, где $U = \sigma_1 \times \tau_2$, то есть

$$(1+5)^{A},(3+7)^{A}\ ;(2+6)^{A}\ ,(4+8)^{A}\ ;(9+13)^{A},(11+15)^{A};(10+14)^{A},(12+16)^{A}$$
$$(9+13)^{B},(11+15)^{B};(10+14)^{B},(12+16)^{B};(1+5)^{B},(3+7)^{B}\ ;(2+6)^{B}\ ,(4+8)^{B}, \tag{19}$$

что дает 4 возможных дублэта $SU(2)_1$ или $SU(2)_2$, причем расположение компонент в столбцах φ_1 таково, что одно и то же преобразование должно проводиться над всеми четырьмя наборами компонент. Если предположить, что один из этих возможных дублетов можно заменить на два синглета, то компоненты остальных возможных дублетов должны быть либо нулевыми, либо также представлять собой пары синглетов соответствующей $SU(2)$.

В силу уравнения Дирака для K- и L-компонент (только при $m_1 = m_2 = 0$) (18) можно преобразовать к виду ($E^{i} \equiv p^{i0}$):

$$\mathcal{D}_1' \varphi_1' = 0, \qquad \mathcal{D}_2' \varphi_2' = 0 \tag{20}$$

где $\mathcal{D}_i' \equiv [\,p^{i1}, -ip^{i2}, p^{i3}, p^{i0}\,]$, а матрицы есть ($\varphi_1'$, φ_2'):

$$\begin{bmatrix} 10\pm14 & 9\pm13 & 12\pm16 & 11\pm15 & 2\pm6 & 1\pm5 & 4\pm8 & 3\pm7 \\ 10\pm14 & -(9\pm13) & 12\pm16 & -(11\pm15) & 2\pm6 & -(1\pm5) & 4\pm8 & -(3\pm7) \\ 9\pm13 & -(10\pm14) & 11\pm15 & -(12\pm16) & 1\pm5 & -(2\pm6) & 3\pm7 & -(4\pm8) \\ (1\pm5) & \pm(2\pm6) & \pm(3\pm7) & \pm(4\pm8) & \pm(9\pm13) & \pm(10\pm14) & \pm(11\pm15) & \pm(12\pm16) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3\pm7 & 4\pm8 & 1\pm5 & 2\pm6 & 11\pm15 & 12\pm16 & 9\pm13 & 10\pm14 \\ 3\pm7 & 4\pm8 & -(1\pm5) & -(2\pm6) & 11\pm15 & 12\pm16 & -(9\pm13) & -(10\pm14) \\ 1\pm5 & 2\pm6 & -(3\pm7) & -(4\pm8) & 9\pm13) & 10\pm14 & -(11\pm15) & -(12\pm16) \\ 9\pm13 & 10\pm14 & 11\pm15 & 12\pm16 & 1\pm5 & 2\pm6 & 3\pm7 & 4\pm8 \end{bmatrix},$$

что эквивалентно в этом случае записи уравнений (8) в компонентах.

Инверсия $(x,y)\to(x,-y)$ переводит $\mathcal{D}_1'\leftrightarrow\mathcal{D}_2'$, $\Psi(x,y)\to\Psi'(x,-y)=U\Psi(x,y)$. При этом

$$\mathcal{D}_1'\varphi_1'[\Psi(x,y)]\to\mathcal{D}_2'\varphi_1''[U\Psi(x,y)],$$

$$\mathcal{D}_2'\varphi_2'[\Psi(x,y)]\to\mathcal{D}_1'\varphi_2''[U\Psi(x,y)],$$

т.е. (20) будет инвариантно при таком преобразовании, если $\varphi_1''=\varphi_2'$, $\varphi_2''=\varphi_1'$. Матрицы φ_1' и φ_2' можно перевести друг в друга, преобразуя Ψ, но только для Ψ_L' или Ψ_R' – преобразование существует для тех компонент, которым соответствуют одинаковые знаки в нижних строках φ_1', φ_2'; тогда $\varphi_1''(V^2\Psi_{RVL})=\varphi_2'(\Psi_{RVL}')$, $\varphi_2''(V^2\Psi_{RVL})=\varphi_1'(\Psi_{RVL}')$, V^2 – матрица, $V^2=V^{-1}$, RVL – „R или L". Только для компонент этого типа разрешено существование дублетов $SU(2)$. Для указанного представления (5) существуют дублеты $SU(2)_R$, $\epsilon_{1k}\epsilon_{2k}=1$; дублеты $SU(2)_L$ разрешены при $\epsilon_{1k}\epsilon_{2k}=-1$, т.е. после смены знаков у α_{1k} (или α_{2k}).

Группа $SU(2)$ является не единственной группой симметрии. В отличие от φ_1, матрица φ_1' допускает 8 типов решений, отличающихся перестановкой компонент Ψ'; все они, с учетом преобразования $\Psi'\to V^2\Psi'$, допускаются и φ_2'. Эти восемь решений разбиваются на два подмножества уже рассмотренного типа Ψ'^A и $\Psi'^B=U\Psi'^A$, т.е. допускается четыре вида дублетов некоторой $SU(2)_{RVL}$. Приведем эти возможные состояния поля как подстановки, опуская индексы, различающие решения (вторую их часть можно получить преобразованием $\Psi \to U\Psi$):

$$
\begin{array}{llllllll}
1\pm5, & 3\pm7; & 2\pm6, & 4\pm8; & 9\pm13, & 11\pm15; & 10\pm14, & 12\pm16 \\
3\pm7, & 9\pm13; & 4\pm8, & 10\pm14; & 11\pm15, & 1\pm5; & 12\pm16, & 2\pm6 \\
1\pm5, & 11\pm15; & 2\pm6, & 12\pm16; & 9\pm13, & 3\pm7; & 10\pm14, & 4\pm8 \\
3\pm7, & 1\pm5; & 4\pm8, & 2\pm6; & 11\pm15, & 9\pm13; & 12\pm16, & 10\pm14
\end{array}
\tag{21}
$$

Записывая их как Ψ, $U_1\Psi$, $U_2\Psi$, $U_3\Psi$, где U_k - матрицы перестановок, имеем для U_k и U следующую алгебру:

$$
\begin{aligned}
&U_1U_2U_3 = U_2U_3U_1 = U_3U_1U_2 = U, \\
&U_1U_3U_2 = U_2U_1U_3 = U_3U_2U_1 = I, \\
&U_2U_1 = U_3, \quad U_1U_3 = U_2, \quad U_2U_3 = U_1, \\
&U_1U_2 = UU_3, \quad U_3U_1 = UU_2, \quad U_3U_2 = UU_1, \\
&U_1^2 = U, \quad U_2^2 = U_3^2 = I, \quad [U, U_k] = 0.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

По (22) все решения делятся на два класса, если отождествить $\Psi \sim U\Psi$: обладающие только одним из трех "свойств", являющихся аналогом трех "цветов" кварков (это $U_k\Psi$), и обладающие всеми тремя "свойствами"(это Ψ). Таким образом мы можем интерпретировать понятие "цвет" для составной системы. При дополнительном требовании сохранения нормы $\Psi^+\Psi$ для каждого класса решений группой глобальной симметрии будет $SU(3)_c \times SU(2)$, о киральных свойствах решений уже говорилось. Решения $U_k\Psi$, $k = 1, 2, 3$, образуют триплеты $SU(3)$, Ψ и $U\Psi$ - ее синглеты и дуолет одной из $SU(2)_{RVL}$, дублетами последней будут и $U_k\Psi$ и $UU_k\Psi$. Отметим, что $[V, U_k] \neq 0$, $[V, U] = 0$.

Дискретная группа матриц 16 x 16 $\mathcal{S}=\{I, U_k, UU_k, U \mid k=1,2,3\}$ образует представление групп преобразований координат (x , y) матрицами 8 x 8 $s=\{1, u_k, uu_k, u\}$ и координат ($x_{1\mu}$, $x_{2\mu}$) матрицами 8 x 8 $s'=\{I, u'_k, u'u'_k, u'\}$ с той же алгеброй (22). Для восстановления последней группы по $\mathcal{S}$ используем следующий прием редукции. Заметим, что u представляет инверсию $(x,y)\to(x,-y)$, а последняя эквивалентна отображению $(x_{1\mu}, x_{2\mu})\to(x_{2\mu}, x_{1\mu})$. Введем сплошную нумерацию координат $x_{i\mu}$: $z_{\alpha+1}\equiv x_{1\alpha}$, $z_{\alpha+5}\equiv x_{2\alpha}$, $\alpha=0, 1, 2, 3$, их преобразования будем записывать как подстановку (вместо z_k пишем k). Соответствующую инверсии матрицу u' получим, если присвоим номера 1, 2, ..., 8 компонентам спиноров в первой строке (19) и отождествим подстановку этих номеров по (19) с u' :

$$u'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Такой прием редукции позволяет записать все матрицы u'_k по подстановкам (21):

$$u'_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix},$$

$$u'_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 3 & 8 & 5 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix},$$

$$u'_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

По ним с учетом связи x_μ, y_μ с $x_{1\mu}, x_{2\mu}$ восстанавливаются матрицы u_k группы s :

$$U_1=\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_0 & x_3 & x_2 & y_1 & -y_0 & y_3 & -y_2 \end{pmatrix},$$

$$U_2=\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & y_0 & -y_1 & y_2 & -y_3 \end{pmatrix},$$

$$U_3=\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_0 & x_3 & x_2 & y_1 & y_0 & y_3 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Два из этих преобразований затрагивают сектор координат x_A, все–сектор y_A; при таких преобразованиях ковариантны уравнения (13 – 16). С геометрической точки зрения множества $\{U_k\}$, $\{u_k\}$, $\{u'_k\}$ – это множества образующих некоторых алгебр, гомоморфных алгебре Клиффорда $C(2, 1)$, соответствующей трехмерному цветовому пространству с сигнатурой (++–) [3]. Дискретные группы $\mathcal{S}$, s, s' изоморфны группе диэдра $\mathcal{D}_4$ [6].

Литература

1. Ченг Т.-П., Ли Л.-Ф. Калибровочные теории в физике элементарных частиц. - М.: Мир, 1987. - 624с.
2. Lubimov V.A., Novikov E.G., Nozik V.Z. et al. An estimate of the ν_e mass from the β-spectrum of tritium in valine molecule. Phys. Lett. B. - 1980. - V. 94, p. 266 - 268.
3. Владимиров Ю.С. Размерность физического пространства - времени и объединение взаимодействий. - М.: Изд-во МГУ. 1987.
4. Fisher J., Limić N., Niederle J., Raczka R. Nuovo Cimento, 1968. - V. 55A. - p. 33.
5. Умэдзава Х. Квантовая теория поля. - М.: ИЛ. 1958.
6. Хамермеш М. Теория групп и её применение к физическим проблемам. - М.: Мир. 1966. - 587с.

УДК 539.1.12

М.А.Иванов

Система уравнений, описывающая 4 поколения с группой симметрии $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$

Рассмотрена система 16-компонентных уравнений, включающая два уравнения типа Бете-Солпитера (без взаимодействия) и два дополнительных условия. Показано, что группой начальной симметрии является $SU(3)_c \times SU(2) \times U(1)$. Группа симметрии устанавливается как следствие уравнений поля; $SU(2)$ должна быть киральной, цветовое пространство имеет сигнатуру (++-). Структура допустимых мультиплетов группы совпадает с постулируемой в $SU(3)_c \times SU(2)_L$- модели сильных и электрослабых взаимодействий, за исключением возможного существования дополнительного $SU(2)_R$ - синглета в поколении.

Научно-исследовательский институт прикладных физических проблем Белорусского госуниверситета им. В.И.Ленина

Рукопись депонирована в ВИНИТИ 19.12.88, № 8842-В88

(Статья поступила в редакцию , аннотация

Полный текст 0,55 а.л., табл. — , ил — , библиограф. - 6 назв.)